

На правах рукописи

**НУРИЕВ Артем Наилевич**

**ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ  
ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ЦИЛИНДРА: ЧИСЛЕННЫЙ  
ЭКСПЕРИМЕНТ, АСИМПТОТИЧЕСКИЙ И  
БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ**

Специальность 01.02.05 — механика жидкости,  
газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Казань — 2013

**Работа выполнена** на кафедре аэрогидромеханики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
*Егоров Андрей Геннадьевич*

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор *Заринов Шамиль Хузеевич*  
доктор физико-математических наук,  
профессор *Кусюмов Александр Николаевич*

Ведущая организация: Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова

Защита состоится 28 ноября 2013 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета 212.081.11 при Казанском (Приволжском) федеральном университете, расположенном по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 18

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан 26 октября 2013 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н., доцент



А.А. Саченков.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы диссертации.** Задача об обтекании вязкой несжимаемой жидкостью круглого цилиндра, совершающего гармонические колебания, является предметом исследования классической гидромеханики начиная еще с работы Стокса 1851 года, но до сих пор сохраняет теоретическую и практическую актуальность. Морское и гражданское строительство, авиационно-космическое проектирование, робототехника – это лишь некоторые из областей, в которых задача имеет практическое приложение. С теоретической точки зрения большой интерес представляет изучение сложных физических механизмов вихреобразования, структурных особенностей течения, анализ интегральных характеристик (например гидродинамических сил, действующих на цилиндр), исследование вопросов устойчивости и бифуркаций решения.

Основные направления исследований задачи можно условно разделить на экспериментальные, численные и асимптотические. Благодаря экспериментам Х. Вильямсона, Х. Хонни, П. Бирмана, М. Татсуно, Т. Сарпкая и других авторов за последние несколько десятилетий накоплен обширный фактический материал. Он дает широкие возможности для верификации теоретических моделей и служит хорошей отправной точкой для разностороннего изучения задачи.

Отдельные данные о структуре и свойствах различных режимов обтекания осциллирующего цилиндра собраны в ходе численных экспериментов, среди которых выделим работы П. Джастенсена, Х. Доча, Г. Илиадиса, П. Сатона, Дж. Элстона. Основное внимание уделялось области умеренных значений управляющих параметров: чисел Стокса  $\beta$  и Рейнольдса  $Re$ , построенных по кинематической вязкости жидкости  $\nu$ , диаметру цилиндра  $D$ , амплитуде скорости  $U$  и периоду  $T$  колебаний ( $\beta = D^2/\nu T$ ,  $Re = UD/\nu$ ). Именно этот диапазон параметров ( $\beta = 10 - 10^3$ ,  $Re < 10^3$ ) характеризуется особым разнообразием режимов течения. В то же время сколь-нибудь полное численное исследование его не проводилось. Не построена численно полная карта режимов, нет оценки влияния смены режимов на гидродинамические силы, действующие на цилиндр, не выделены различные режимы вторичных стационарных течений, индуцируемых колеблющимся цилиндром.

Возможность использования асимптотических методов при анализе задачи связана с тем, что в практически интересном случае высокочастотных колебаний цилиндра параметр  $\beta$  является большим. Наиболее полное исследование задачи при  $\beta \gg 1$  было проведено в работе Ч. Ванга на основе метода сращивания асимптотических разложений с расщеплением течения на осциллирующую и стационарную (вторичное течение) части. Однако здесь, как и в основополагающей работе Стокса, предполагалось, что вторичные течения слабы, так что построенный для них параметр Рейнольдса  $Re_s = Re^2(2\pi\beta)^{-1}$  мал. Отказ от этого упрощающего предположения приводит к тому, что необходимым этапом асимптотического анализа становится численное решение полных уравнений Навье-Стокса для описания вторичных стационарных течений вокруг цилиндра. Экспериментальные исследования указывают на наличие при достаточно больших  $Re_s$  нескольких режимов обтекания осциллирующего цилиндра. Поэтому следует ожидать, что при больших значениях параметра  $Re_s$  существует несколько решений задачи о вторичных стационарных течениях. Их локализация и исследование требует реализации методов бифуркационного анализа для систем большой размерности.

Таким образом, исследование течения вязкой жидкости вокруг осциллирующего цилиндра с использованием численного эксперимента, методов асимптотического и бифуркационного анализа является **актуальной** задачей.

**Целью** работы является исследование режимов обтекания вязкой жидкостью гармонически осциллирующего цилиндра и нахождение действующих на цилиндр гидродинамических сил.

Достижение поставленной цели требует решения следующих **задач**:

1. Проведение асимптотического анализа задачи об обтекании осциллирующего цилиндра вязкой жидкостью при  $Re_s \gtrsim 1$ ,  $\beta \gg 1$ .
2. Разработка численных алгоритмов и программного обеспечения для бифуркационного анализа систем большой размерности, возникающих при решении задач вычислительной гидродинамики.
3. Проведение численного эксперимента по обтеканию вязкой жидкостью осциллирующего цилиндра; построения карты режимов обтекания, нахождение

ние действующих на цилиндр гидродинамических сил и картин вторичных стационарных течений в области умеренных значений управляющих параметров  $Re$  и  $\beta$ .

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач используются современные методы бифуркационного, асимптотического и численного анализа. Программная реализация численных методов осуществлялась с применением технологии NVIDIA CUDA. Численный эксперимент проводился с использованием пакета OpenFOAM на высокопроизводительном кластере с применением технологии MPI.

**Научная новизна:**

1. Реализованы методы бифуркационного анализа систем большой размерности (до  $10^6$  неизвестных) применительно к задачам вычислительной гидродинамики. Впервые локализованы и исследованы различные решения классической задачи о циркуляционном стационарном течении жидкости в квадратной каверне в диапазоне чисел Рейнольдса, меньших 20000. Обнаружены и исследованы три типа вторичных стационарных течений около осциллирующего цилиндра.
2. Проведено асимптотическое исследование задачи об обтекании осциллирующего цилиндра вязкой жидкостью в диапазоне  $Re_s \gtrsim 1$ ,  $\beta \gg 1$ . Уточнено известное асимптотическое разложение для действующей на цилиндр гидродинамической силы.
3. Проведено прямое численное моделирование различных двух- и трехмерных режимов обтекания вязкой жидкостью осциллирующего цилиндра в диапазоне умеренно больших ( $15 < \beta < 1035$ ) чисел Стокса. Построена карта режимов, проанализированы вторичные течения, найдены действующие на цилиндр гидродинамические силы.

**Достоверность результатов** следует из корректности математических постановок задач, из внутренних проверок используемых методов (проверка аппроксимационной сходимости и выполнения законов сохранения), а также из согласования полученных результатов с известными данными экспериментальных и численных исследований.

**Практическая ценность.** Работа носит, в основном, теоретический характер. Вместе с тем, разработанные численные алгоритмы и программное обеспечение могут быть непосредственно использованы для бифуркационного анализа реальных гидродинамических систем, полученные в работе решения задачи о циркуляционном течении в каверне могут рассматриваться как тестовые при разработке новых методов решения задач вычислительной гидродинамики. Полученные в работе соотношения для гидродинамических сил, действующих на осциллирующий цилиндр, могут найти свое применение, например, при определении демпфирующих свойств материалов на основе изучения затухающих колебаний цилиндрических тест-образцов.

Работа выполнялась в рамках НИР «Комплексные проблемы механики сред сложной структуры и методы их решения с использованием параллельных алгоритмов», проводимой в КФУ в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ 2013 г. и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (соглашение №2012-1.2.1-12-000-1002-030).

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Вычислительный алгоритм бифуркационного анализа систем большой размерности применительно к задачам вычислительной гидродинамики.
2. Новые, отличные от классических решения в задаче о циркуляционном стационарном течении жидкости в квадратной каверне и в задаче о вторичных стационарных течениях около гармонически осциллирующего цилиндра.
3. Результаты асимптотического исследования задачи об обтекании осциллирующего цилиндра вязкой жидкостью в диапазоне  $Re_s \sim 1, \beta \gg 1$ . Уточненная асимптотическая формула для действующей на цилиндр гидродинамической силы.
4. Результаты численного эксперимента по обтеканию вязкой жидкостью осциллирующего цилиндра для умеренно больших чисел Стокса ( $15 < \beta < 1035$ ). Карта режимов обтекания, анализ вторичных течений и действующих на цилиндр гидродинамических сил.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: VII, VIII молодежные школы-конференции «Лобачевские чтения», Казанский государственный университет, Казань, 2008, 2009 гг.; Итоговая научно-образовательная конференция студентов казанского университета 2009, Казанский государственный университет, Казань, 2009 г.; XI международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 2009 г.; Итоговые конференции Казанского (Приволжского) федерального университета за 2011 и 2012 годы, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 2011, 2012 гг.; Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, 2010 – 2013 гг.; Международная конференция по механике «Шестые Поляховские чтения», Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2012 г.; Семинары кафедры аэрогидромеханики Казанского (Приволжского) федерального университета.; Семинар кафедры волновой и газовой динамики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, 2013.

**Личный вклад** автора заключается в совместной с научным руководителем постановке задач, обсуждении и интерпретации результатов. Постановка и реализация численных экспериментов, бифуркационного анализа стационарных задач принадлежат автору.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 17 работ, в том числе 5 в журналах из списка ВАК.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. В конце каждой главы сформулированы выводы. Полный объем диссертации составляет 174 страницы с 59 рисунками и 11 таблицами. Список литературы содержит 122 наименования.

## **Содержание работы**

Во **введении** обоснована актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приведен обзор научной литературы по

изучаемой проблеме, сформулированы цель и задачи работы, отмечены научная новизна и практическая значимость полученных результатов, представлены положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** изложены методы численного и бифуркационного анализа стационарных задач, используемые в работе, на примере тестовой задачи о течении вязкой жидкости в квадратной каверне. Эта глава состоит из 10 разделов. Во введении (раздел 1.1) представлен краткий обзор литературы по задаче о циркуляционном течении вязкой жидкости в квадратной каверне. Разделы 1.2 – 1.4 посвящены исследованию основной ветви решения. Рассматриваемый диапазон чисел Рейнольдса  $0 < Re < 80000$  требует использования подробных сеток и высокоэффективных численных процедур решения нелинейных систем сеточных уравнений. Эффективная итерационная схема решения стационарной системы Навье-Стокса со вторым порядком точности в терминах скорость-давление представлена в разделах 1.2, 1.3 главы. Высокая скорость сходимости, точность и устойчивость этой схемы обеспечиваются двумя факторами. Во-первых, специальная дискретизация конвективных слагаемых позволяет гарантировать диагональное преобладание матрицы линеаризованной системы на каждом итерационном шаге, одновременно обеспечивая второй порядок точности схемы. Во-вторых, использование одного цикла многосеточного метода при решении промежуточных линейных задач позволяет прийти к желаемому компромиссу между необходимой точностью и скоростью вычислений. Использование в разделе 1.4 разработанной численной схемы позволило провести систематические расчеты в рассматриваемом диапазоне на очень подробных сетках с числом узлов до  $n = 4096^2$ . Сравнение полученных результатов с имеющимися результатами других авторов подтвердили высокую точность и эффективность предложенной схемы.

В разделах 1.5 – 1.9 проводится исследование вопроса существования других ветвей решения. Для этих целей используются специальные методы бифуркационного анализа (БА). В данной работе БА реализуется в рамках классического подхода (описанного, например, в работе Ю. А. Кузнецова) для анализа однопараметрических нелинейных систем. Его целью является построение возможных ветвей решения и их стратификация относительно бифурка-



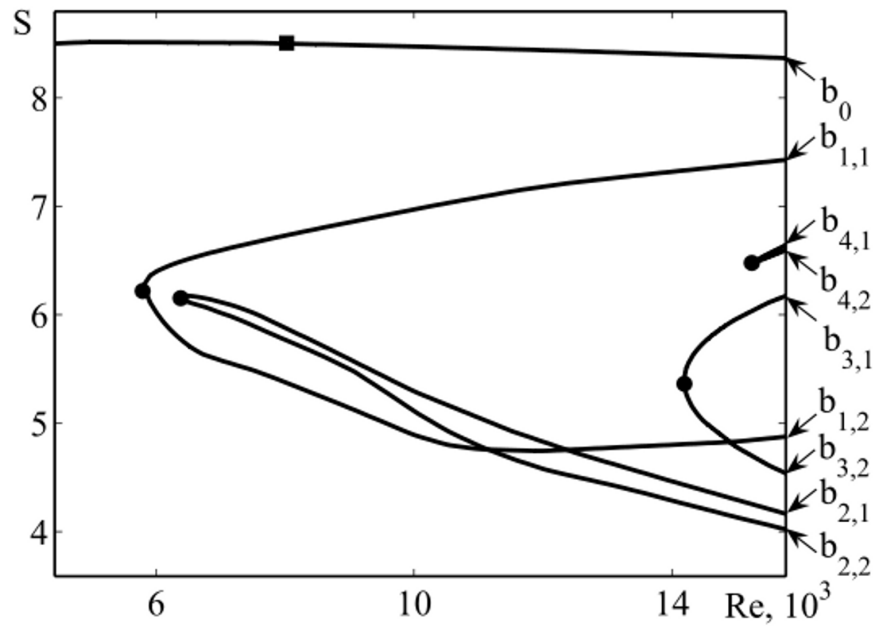


Рис. 1: Ветви решения задачи о циркуляционном течении в квадратной каверне. Круглые маркеры – бифуркации складки, квадратный маркер – потеря устойчивости основной ветви

ций фазового портрета системы. Анализ проводится в расширенном фазово-параметрическом пространстве, которое является прямым произведением фазового и параметрического пространств системы. Основными компонентами анализа являются задачи (а) локализации решений, (б) продолжения по параметру, (с) исследования точек бифуркаций.

Задача (а) локализации служит для поиска вещественных решений системы при фиксированном значении числа Рейнольдса. Поскольку задача имеет большую размерность (до  $10^6$  неизвестных), применение универсальных методов поиска решений оказывается невозможным. Также невозможно и прямое выделение решений, так как неизвестны ни их число, ни хорошие начальные приближения к ним. Однако, как правило, одно из решений задачи, непрерывно продолжающееся от малых чисел Рейнольдса, строится без особых затруднений. Это обстоятельство позволяет использовать для решения задачи локализации метод FPN гомотопии, предложенный в работе С. К. Рахимиана.

Задача (б) продолжения по параметру призвана обеспечить движение по выделенным локализацией ветвям решения в фазово-параметрическом пространстве системы. Для ее решения рассматривается расширенная система уравнений, в которой, помимо дискретных переменных, неизвестным считается также и параметр системы (в нашем случае число Рейнольдса). Метод решения

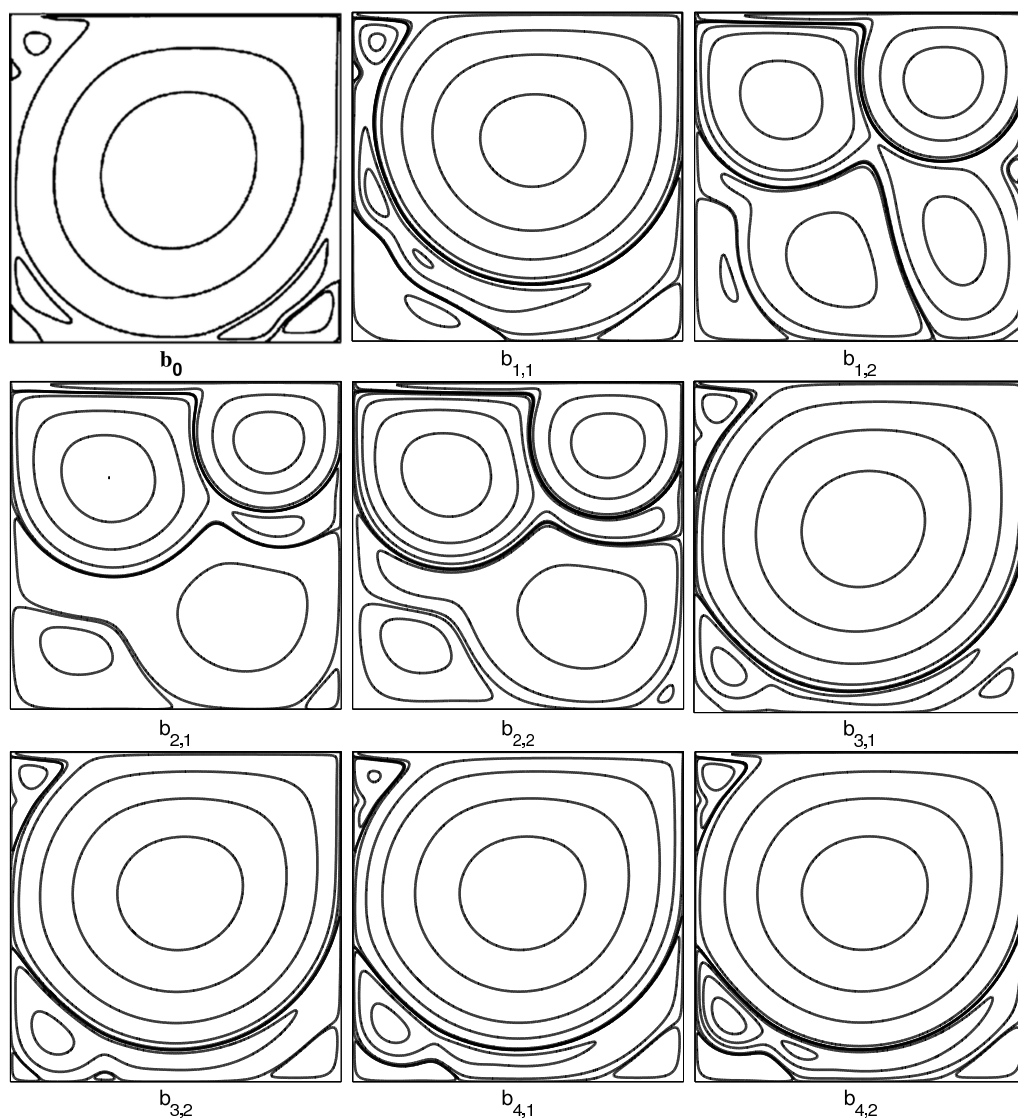


Рис. 2: Линии тока при  $Re = 16000$

основан на подходе «предиктор-корректор». В качестве предиктора в работе используется метод касательной, в качестве корректора – метод Мура-Пенроуза. Такая связка позволяет эффективно аппроксимировать ветвь даже в окрестностях точек бифуркаций.

Исследование точек бифуркаций (с) позволяет провести заключительную стратификацию ветвей и построить бифуркационную диаграмму. Локализация точек бифуркации проводится при решении спектральной задачи.

Проведенный анализ позволяет выявить четыре дополнительные ветви решения. Картины течения и бифуркационная диаграмма для этих ветвей представлены на рисунках 1, 2.

Все четыре дополнительные ветви образуются в результате бифуркаций складок при числах Рейнольдса  $Re \approx 5800$ ,  $Re \approx 6360$ ,  $Re \approx 14190$ ,  $Re \approx 15270$ . Каждая из них содержит по два неустойчивых решения. Их кривые на рис. 1 обозначены через  $b_{i,j}$ , где первый индекс  $i$  указывает на номер ветви, второй индекс  $j$  – на номер решения. Через  $b_0$  обозначена основная ветвь решения. Как видно из рис. 1, уже при умеренных числах Рейнольдса ( $Re = 6500$ ) помимо устойчивого решения основной ветви существует 4 дополнительных неустойчивых решения, а для  $Re > 15500$  общее число найденных решений достигает 9.

Во **второй главе** проводится асимптотическое исследование плоской задачи обтекания вязкой несжимаемой жидкостью круглого цилиндра, совершающего высокочастотные гармонические колебания.

Раздел 2.1 содержит вводные замечания. В разделе 2.2 дается постановка задачи. В рассматриваемой асимптотике отношение  $\varepsilon = (\beta\pi/2)^{-1/2}$  толщины стоксовского нестационарного пограничного слоя к радиусу цилиндра принимается малым параметром, а число Рейнольдса для вторичных течений  $Re_s$  – величиной порядка единицы. Асимптотическая процедура развивает метод Шлихтинга-Ванга сращивания внешнего и внутреннего разложений для осциллирующей и стационарной составляющих решения. Детали этой процедуры изложены в разделе 2.3 работы.

Рассматриваемая асимптотика отличается от полученной в классических работах Стокса и Ванга, где дополнительно принималась малость  $Re_s$ :  $Re_s = 0$  (Стокс) и  $Re_s \sim \varepsilon$  (Ванг). Асимптотические исследования задачи при  $Re_s \sim 1$  проводились ранее в работах Райли. По сравнению с работами Райли наш анализ позволяет учитывать больше членов разложения и содержит иные походы к исследованию вторичных стационарных течений задачи.

Основное внимание в работе уделяется определению гидродинамической силы, действующей на цилиндр. В разделах 2.4.1 – 2.4.8 представлено аналитическое выражение для первых четырех членов разложения силы по степеням  $\varepsilon$ . Первые три члена описывают инерциальную составляющую, силу Бассэ и вязкую составляющую силы. Эти слагаемые не зависят от параметра  $Re_s$  и дают линейный отклик на колебания. В отличие от этих, известных ранее членов, четвертый член разложения появляется в результате нелинейного взаимодействия

гармоник в пограничном слое и существенно (квадратично) зависит от  $\text{Re}_s$ . Следует отметить, что, помимо основной гармоник, он содержит дополнительную временную гармонику. Этот член разложения силы гидродинамического сопротивления по степеням  $\varepsilon$  является последним, который может быть определен явно. Пятый член разложения, найденный в разделе 2.4.9, требует численного решения задачи о внешнем вторичном стационарном течении. Эта задача описывается стационарной системой уравнений Навье-Стокса, где в роли управляющего параметра выступает  $\text{Re}_s$ .

Результирующая формула для гидродинамической силы в форме Морисона может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_x &= -\pi\varepsilon^{-2}C_m \sin t + \varepsilon^{-1}\text{Re}_s^{1/2}C_d |\cos t| \cos t, \\ C_m &= 2 + 2\sqrt{2}\varepsilon + \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3}(4 - \sqrt{2})\gamma^2 \right) \varepsilon^3 - \\ &\quad - \left( 0.5 - \text{Re}_s^{1/2}I_2^G + 24.135\text{Re}_s + 12I_1^G\text{Re}_s \right) \varepsilon^4, \\ C_d &= -\frac{3\pi^2}{8\sqrt{\text{Re}_s}} \left( 2\sqrt{2} + 2\varepsilon - \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{5}{6}(1 + \sqrt{2})\text{Re}_s \right) \varepsilon^2 - 12.622\text{Re}_s\varepsilon^3 \right) \end{aligned}$$

Здесь  $C_m$  – коэффициент присоединенных масс,  $C_d$  – коэффициент вязкого сопротивления, а  $I_1^G$ ,  $I_2^G$  – коэффициенты, порядка единицы, зависящие от решения задачи о вторичном стационарном течении.

Несмотря на малый (порядка  $\varepsilon^4$ ) вклад в гидродинамические силы, вторичные стационарные течения, возникающие под действием трения в пограничном слое, играют важную роль в переносе массы из пограничного слоя цилиндра во внешнюю область течения и имеют определяющее значение в установлении режима течения в целом.

Исследования задачи о вторичных течениях проводятся в разделе 2.5 работы с помощью аппарата БА, изложенного в первой главе диссертации. Применение методов БА позволило выявить в диапазоне  $0 < \text{Re}_s < 200$  девять различных решений. Бифуркационная диаграмма фазово-параметрического пространства изображена на рисунке 3; по вертикальной оси отложена кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_{\theta}^2 + v_r^2) dx dy,$$

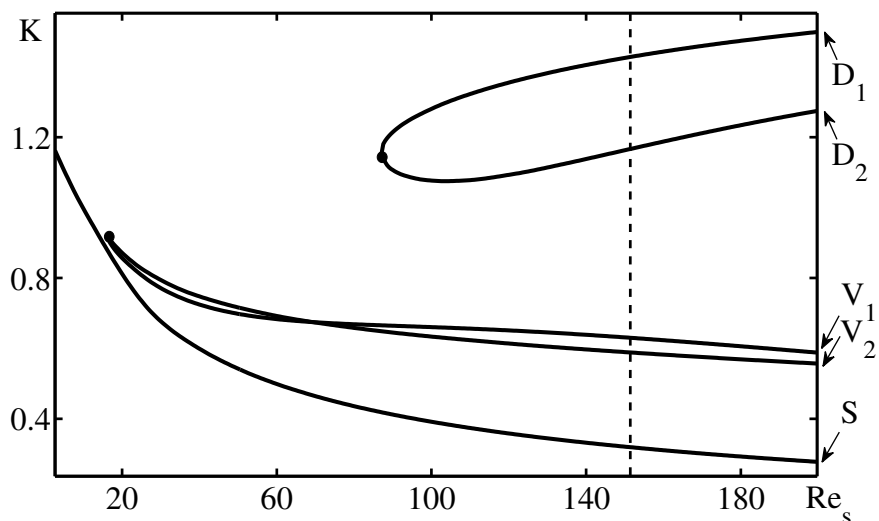


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма фазово-параметрического пространства

а по горизонтальной оси число Рейнольдса –  $Re_s$ . На диаграмме представлены 3 ветви, одна из которых (S) отвечает базовому решению, две другие – V- и D- решениям. Основная (S) ветвь решения характеризуется  $\pi$ -периодичностью и симметрией течения относительно вертикальной оси (рис. 4). V-решения, оставаясь симметричными относительно вертикальной оси, утрачивают  $\pi$ -периодичность. Характерные картины течения для них при  $Re_s = 150$  изображены на рисунке 5. Появляющиеся при  $Re_s \approx 87$  D-решения утрачивают симметрию относительно вертикальной оси, оставаясь  $\pi$ -периодическими. Характерные картины течения для них изображены на рисунке 5. Следует отметить, что каждая точка на V и D ветвях рисунка 3 соответствует паре решений, переходящих друг в друга при зеркальном отображении относительно горизонтальной оси.

Раздел 2.6 посвящен анализу и сравнению полученных результатов с известными экспериментальными данными.

В третьей главе проводится прямое численное моделирование (DNS) обтекания осциллирующего круглого цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью.

В разделах 3.1, 3.2 даны вводные замечания и постановка задачи. Рассматривается как плоская, так и трехмерная задачи. Численные исследования проводятся при  $0 < \beta < 1035$ ,  $Re < 3000$ . При таких числах Рейнольдса можно эффективно использовать прямое численное моделирование, не опасаясь столкнуться с эффектами мелкомасштабной турбулентности. Все расчеты проводятся

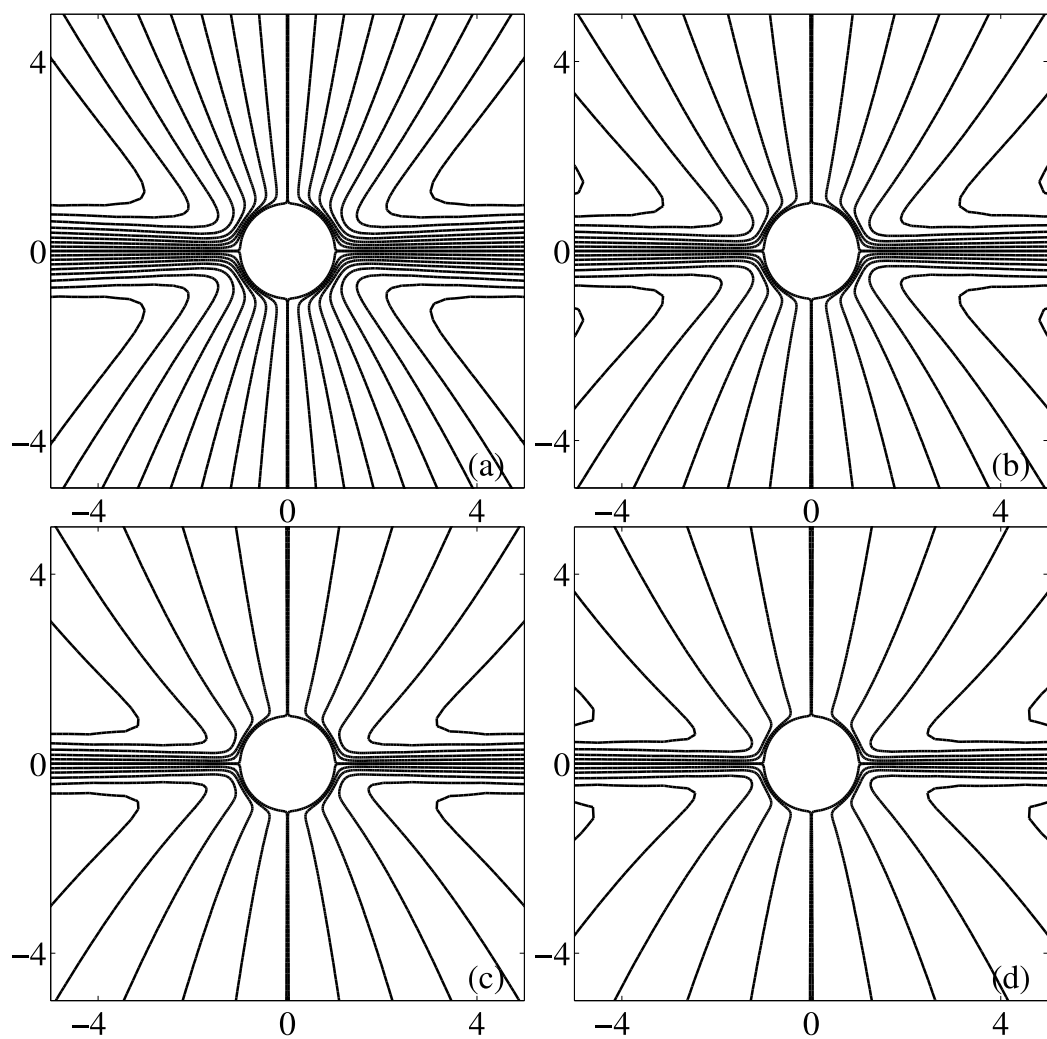


Рис. 4: Основная ветвь решения. Линии тока для различных чисел Рейнольдса: (a)  $Re_s = 50$ ,  
(b)  $Re_s = 100$ , (c)  $Re_s = 150$ , (d)  $Re_s = 200$ .

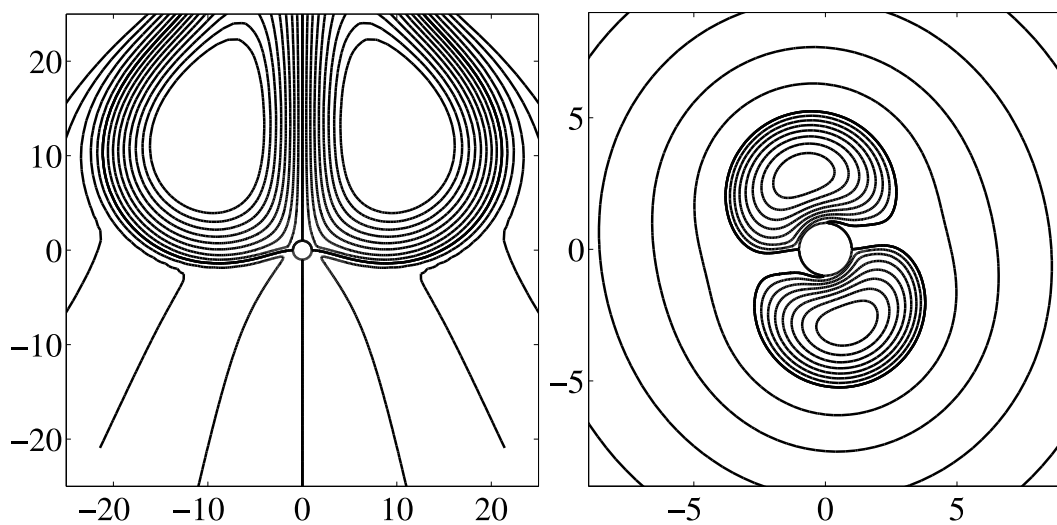


Рис. 5: Характерные картины течения для V и D режимов при  $Re_s = 150$ .

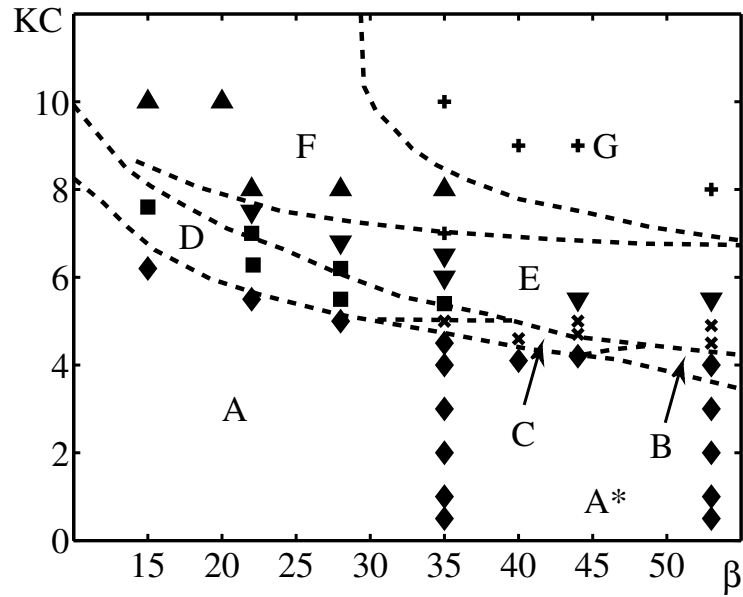


Рис. 6: Карта режимов при малых числах Стокса. Маркерами отмечены точки проведенных численных расчетов, пунктирными линиями – границы режимов Татсуно и Бирмана.

на высокопроизводительном кластере в пакете OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation) – открытой платформе для численного моделирования. Этот пакет представляет широкий инструментарий для формализации задачи. Основные детали разработки используемых моделей в пакете, такие как создание геометрии и дискретизации области решения, выбора методов дискретизации управляющей системы, задания граничных условий, выбора численных методов решения (методов решения линейных уравнений, предобуславливателей и их параметров), задания управляющих параметров задачи, приведены в разделах 3.3 – 3.4 работы.

Результаты двумерного моделирования представлены в разделе 3.5. Диапазон исследования двумерной задачи можно условно разделить на две части. Первая часть – диапазон малых значений параметра  $\beta$  ( $10 < \beta < 50$ ). С ростом параметра  $Re$  здесь наблюдается быстрая смена разнообразных режимов течения. На рисунке 6 изображена карта режимов для этого диапазона, построенная в экспериментальной работе Татсуно и Бирмана. Карта выполнена в параметрической плоскости  $\beta$ – $KC$ , где  $KC = Re\beta^{-1}$  – так называемый параметр Келегана-Карпентера, который обычно используется в экспериментальных работах вместо числа Рейнольдса. Символические обозначения режимов течения даны согласно

работе Татсуно и Бирмана, маркерами отмечены численные расчеты, проведенные в нашей работе. Вид маркера зависит от наблюдаемой структуры течения. В большей части диапазона преобладают периодические режимы.

По характерным структурным особенностям все периодические режимы течения разделяются на три типа. К первому типу (S) относится базовый симметричный режим течения (рис. 7), который реализуется в области малых чисел КС (отмечен ромбовидными маркерами на рис. 6). При переходе через  $КС_{cr}(\beta)$  симметричное течение S-типа теряет устойчивость. Потеря устойчивости происходит в пользу режимов V-типа (рис. 8). К этому типу относится 2 несимметричных периодических режима, отмеченных на карте квадратными и крестообразными маркерами. По обе стороны цилиндра течение отклоняется от оси колебания, появляется периодическая подъемная сила. Общая структура течения в среднем остается симметричной относительно вертикальной оси. В целом, осредненная картина течения подобна V-типу вторичного стационарного течения, обнаруженному во второй главе диссертации. Третий тип периодического течения был локализован в окрестности верхней границы чисел КС (отмечен маркером ▲). Режим характеризуется формированием диагональных вихревых дорожек, образованных из вихревых пар (рис. 9), которые каждые пол периода срываются с разных сторон цилиндра. Карина течения здесь, оставаясь в среднем  $\pi$ -периодической, утрачивает симметрию относительно вертикальной оси. Это позволяет ее классифицировать, как относящуюся к D-типу решения. В зоне между режимами V- и D-типов наблюдаются псевдопериодические режимы (отмечены ▼) и непериодические течения (отмечены +).

Полученные численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными работы Татсуно и Бирмана (рис. 6).

Вторая часть исследуемого диапазона – умеренные значения параметра  $\beta$  ( $50 < \beta < 1035$ ). Этот диапазон более трудоемок для численных расчетов. Растущие числа Рейнольдса требуют улучшения разрешающей способности сеток, одновременно с этим усиливается влияние трехмерных структур. Однако и здесь двумерные расчеты позволяют определить общую картину течения и с достаточной точностью предсказать поведение сил гидродинамического сопротивления.



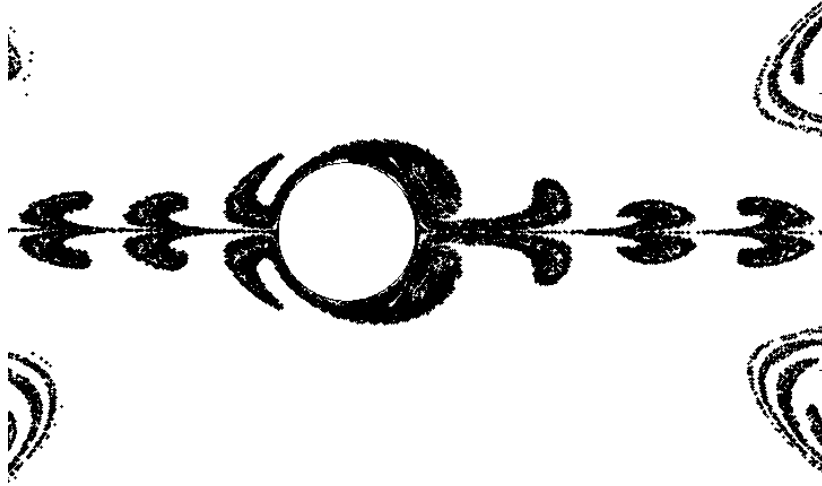


Рис. 7: Режим S при  $\beta = 35$ ,  $KC = 4.5$ . Визуализация с помощью невесомых частиц.



Рис. 8: Режимы V при  $\beta = 35$ ,  $KC = 5.5$ . Визуализация с помощью невесомых частиц.



Рис. 9: Режим D при  $\beta = 35$ ,  $KC = 8$ . Визуализация с помощью невесомых частиц.

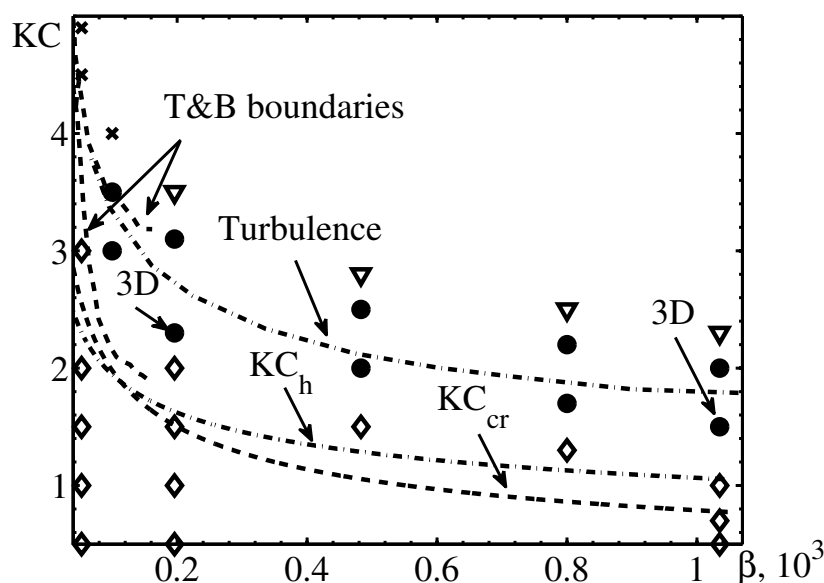


Рис. 10: Карта режимов при умеренных числах Стокса.

Карта режимов при умеренных числах Стокса приведена на рисунке 10. Маркерами на карте отмечены, проведенные двухмерные и трехмерные расчеты.

Двухмерная структура течения в этом диапазоне не отличается большим разнообразием режимов. Основную часть исследуемой области занимает базовый периодический режим S, отмеченный на карте ромбовидными маркерами. Граница потери двухмерной устойчивости базового режима достаточно трудно локализуется. В окрестности границы реализуется слабо асимметричный переходный режим течения, который отмечен на карте круглыми маркерами. За этим режимом следует полное нарушение симметрии течения и утрата периодичности. Точки с непериодическими режимами течения обозначены на карте треугольными маркерами.

Раздел 3.6 посвящен исследованию влияния трехмерной неустойчивости. В нем представлены результаты двухмерного и трехмерного моделирования для случаев умеренных ( $\beta = 196$ ,  $KC = 2.3$ ) и больших ( $\beta = 1035$ ,  $KC = 1.5$ ) чисел Стокса. Обе комбинации параметров соответствуют режимам течения в зоне трехмерной неустойчивости. Установлено, что несмотря на структурные различия течений в плоскости ортогональной оси цилиндра, продольная составляющая силы для двухмерных и трехмерных расчетов имеет практически одинаковые значения.

В разделе 3.7 представлена визуализация вторичных стационарных течений для периодических режимов. Визуализация проводится посредством осреднения скорости по нескольким периодам колебания. Структура осредненных течений качественно согласуется со структурой вторичных стационарных течений, полученных при асимптотическом анализе задачи в главе 2.

В разделе 3.8 проводится анализ сил, действующих на цилиндр. Полученные численные данные во всем исследованном диапазоне управляющих параметров хорошо согласуются с результатами экспериментальных исследований и, в области малых  $Re_s$ , с результатами асимптотического анализа.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработан программный комплекс для бифуркационного анализа стационарных задач вычислительной гидромеханики. Программный комплекс основан на универсальных методах анализа систем большой размерности, он легко адаптируется для исследования задач в разной постановке (в примитивных переменных, в терминах вихрь-функция тока) и различной дискретизации.
2. Проведен бифуркационный анализ классической задачи вычислительной гидродинамики о циркуляционном течении жидкости в квадратной каверне в диапазоне чисел Рейнольдса, меньших 20000. Впервые показано, что эта задача имеет неединственное решение. Локализовано и исследовано несколько дополнительных ветвей решения задачи.
3. Проведено асимптотическое исследование задачи об обтекании осциллирующего цилиндра вязкой жидкостью в диапазоне  $Re_s \gtrsim 1$ ,  $\beta \gg 1$ . Выполнен бифуркационный анализ сопутствующей стационарной задачи о вторичных течениях вокруг осциллирующего цилиндра. Впервые локализовано несколько типов вторичного стационарного течения. Уточнено известное асимптотическое разложение для действующей на цилиндр гидродинамической силы. Показано, что построенные асимптотики хорошо описывают нелинейное поведение коэффициентов сопротивления.

4. На базе пакета OpenFOAM в двух- и трехмерной постановке выполнен численный эксперимент по обтеканию гармонически осциллирующего цилиндра вязкой жидкостью. В рамках двухмерной постановки проведено исследование периодических режимов течения в широком диапазоне чисел Стокса ( $15 < \beta < 1035$ ), построена карта режимов, исследованы вторичные течения, проведен анализ сил сопротивления. Найденные значения коэффициентов сопротивления в диапазоне умеренных чисел Стокса хорошо согласуются как с результатами асимптотического анализа, так и с экспериментальными данными. Построенная численно карта режимов практически идентична найденной в экспериментах. В рамках трехмерной постановки было исследовано развитие неустойчивости Хони в пограничном слое. Показано, что эта неустойчивость не оказывает существенного влияния на силы сопротивления.

## **Публикации автора по теме диссертации**

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Егоров, А. Г. Неединственность стационарного течения вязкой жидкости в квадратной каверне / А. Г. Егоров, А. Н. Нуриев // Учен. зап. Каз. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки. – 2009. – Т. 151, № 3. – С. 130–143.
2. Демидов, Д. Е. Решение задач вычислительной гидродинамики с применением технологии Nvidia CUDA / Д. Е. Демидов, А. Г. Егоров, А. Н. Нуриев // Учен. зап. Каз. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки. – 2010. – Т. 152, № 1. – С. 142–154.
3. Нуриев, А. Н. Использование методов бифуркационного анализа при исследовании системы уравнений Навье-Стокса для приложения в задачах гидромеханики и химической технологии / А. Н. Нуриев // Вестник Казанского технологического университета. – 2011. – № 16. – С. 334–336.
4. Нуриев, А. Н. Решение задачи об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости в пакете OpenFOAM / А. Н. Нуриев, О. Н. Зайцева // Вест-

ник Казанского технологического университета. – 2013. – № 8. – С. 116–123.

5. Нуриев, А. Н. Применение методов бифуркационного анализа для решения задач гидромеханики / А. Н. Нуриев, А. Г. Егоров // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – № 4. – С. 104–109.

Работы, опубликованные в других изданиях:

6. Нуриев, А. Н. Стационарное течение в каверне с подвижной крышкой при высоких числах Рейнольдса / А. Н. Нуриев // Труды математического центра им. Лобачевского. – 2008. – Т. 37. – С. 130–132.
7. Нуриев, А. Н. Устойчивость плоского стационарного течения в каверне с подвижной крышкой / А. Н. Нуриев // Труды математического центра им. Лобачевского. – 2008. – Т. 37. – С. 133–135.
8. Нуриев, А. Н. О неединственности стационарного течения в каверне с подвижной верхней крышкой / А. Н. Нуриев // Труды математического центра им. Лобачевского. – 2009. – Т. 39. – С. 310–312.
9. Nuriev, A. The 2-D steady incompressible flow in a driven cavity at high Reynolds numbers / A. Nuriev // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского государственного университета. Сборник статей. – 2009. – С. 298–299.
10. Нуриев, А. Н. Ускорение решения задач гидромеханики с помощью технологии CUDA / А. Н. Нуриев // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского государственного университета. Сборник тезисов. – 2009. – С. 41–42.
11. Демидов, Д. Е. Использование технологии NVIDIA CUDA для решения задач гидромеханики / Д. Е. Демидов, А. Г. Егоров, А. Н. Нуриев // Супервычисления и математическое моделирование. Тезисы. – 2009. – С. 58–59.
12. Демидов, Д. Е. Применение технологии Nvidia CUDA для решения задач гидродинамики / Д. Е. Демидов, А. Г. Егоров, А. Н. Нуриев // Основы ра-

боты с технологией CUDA / Под ред. А. В. Борескова, А. А. Харламова. – 2010. – С. 193–204.

13. Нуриев, А. Н. О существовании различных стационарных ветвей решения задачи течения вязкой жидкости в квадратной каверне / А. Н. Нуриев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2010». – М.: МАКС Пресс, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
14. Нуриев, А. Н. Асимптотическое решение задачи о высокочастотном осциллирующем вязком потоке вокруг цилиндра / А. Н. Нуриев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2011». – М.: МАКС Пресс, 2011. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
15. Нуриев, А. Н. Численное исследование бифуркаций двумерных стационарных уравнений Навье-Стокса / А. Н. Нуриев // Шестые Поляховские чтения. Тезисы докладов. – СПб.: 2012. – С. 169.
16. Нуриев, А. Н. Применение методов бифуркационного анализа для решения задачи о вторичном стационарном течении вокруг осциллирующего цилиндра / А. Н. Нуриев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2012». – М.: МАКС Пресс, 2012. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
17. Нуриев, А. Н. Исследование периодических режимов течения в задаче об осциллирующем движении цилиндра в вязкой жидкости / А. Н. Нуриев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013». – М.: МАКС Пресс, 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).